Тема: Логарифмические неравенства

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Неравенства, которые содержат переменную под знаком логарифма или в его основании, называются логарифмическими.

Решение логарифмических неравенств основывается на свойстве монотонности логарифмической функции: функция $y = \log_a x$ монотонно возрастает, если $a > 1$, и монотонно убывает, если $0 < a < 1$. При этом учитывается, что подлогарифмическое выражение может принимать только положительные значения. Таким образом, для неравенства вида

$$\log_a f(x) > \log_a g(x)$$

при потенцировании, для значений $a > 1$ знак неравенства сохраняется; а для значений $0 < a < 1$, меняется на противоположный.

В случае если переменная содержится и в основании, и в подлогарифмическом выражении, например $\log_{\varphi(x)} f(x) > \log_{\varphi(x)} g(x)$, решение разбивается два случая, когда $\varphi(x) > 1$ и, когда $0 < \varphi(x) < 1$, то есть

$$\log_{\varphi(x)} f(x) > \log_{\varphi(x)} g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \varphi(x) > 1 \\ 0 < g(x) < f(x) \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < \varphi(x) < 1 \\ 0 < f(x) < g(x) \end{cases} \end{array}\right.$$

Так же некоторые логарифмические неравенства можно решить методом замены переменной.

ПРИМЕР 1

Задание Решить неравенство $\log_{\frac{1}{4}}(3x - 8) < -2$

Решение

$$3x - 8 > 0, \quad \underline{x > 2\frac{2}{3}} \quad (*)$$

Умножим правую часть на $1 = \log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{4}$, получим:

$$\log_{\frac{1}{4}}(3x - 8) < -2 \cdot \log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{4}$$

По свойствам логарифмов, внесем коэффициент -2 как степень подлогарифмического выражения:

$$\log_{\frac{1}{4}}(3x - 8) < \log_{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{4}\right)^{-2}$$

$$\log_{\frac{1}{4}}(3x - 8) < \log_{\frac{1}{4}} 16$$

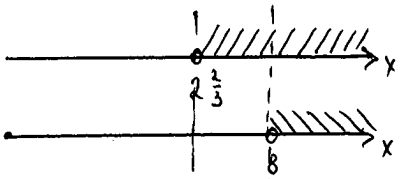
$y = \log_{\frac{1}{4}} x$ - убыв. ф.

Далее переходим к подлогарифмическим выражением и, так как основание логарифма $0 < \frac{1}{4} < 1$, то знак неравенства изменится на противоположный:

$$3x - 8 > 16$$

$$3x > 24$$

$$\underline{x > 8}$$



Полученный интервал полностью принадлежит области допустимых значений, поэтому он и является решением заданного неравенства.

Ответ $x \in (8; +\infty)$

ПРИМЕР 2

Задание Решить неравенство $\log_2(12-4x) > 4$

Решение

$$12-4x>0; \quad 4x<12; \quad \underline{x<3} \quad (*)$$

Умножая правую часть на $1 = \log_2 2$, получим:

$$\log_2(12-4x) > 4 \cdot \log_2 2$$

По свойствам логарифмов, коэффициент 4 можно внести под знак логарифма как степень подлогарифмического выражения:

$$\log_2(12-4x) > \log_2 2^4$$

$$\log_2(12-4x) > \log_2 16 \qquad y = \log_2 x \text{ - возр. ф.}$$

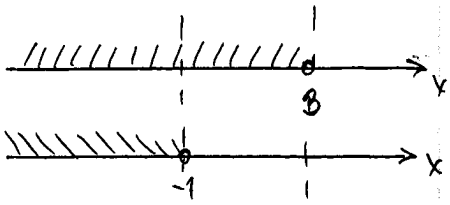
Далее потенцируем по основанию 2 и, так как основание логарифма $2>1$, то знак неравенства не изменится:

$$12-4x>16$$

$$4x<12-16$$

$$4x<-4$$

$$\underline{x<-1}$$



Данный интервал попадает в область допустимых значений, поэтому является решением.

Ответ $x \in (-\infty : -1)$

ПРИМЕР 3

Задание Решить неравенство $\log_{\frac{1}{2}} \log_3(x+1) \geq 0$

Решение

$$\begin{cases} \log_3(x+1) > 0 \\ x+1>0 \end{cases}; \quad \begin{cases} \log_3(x+1) > \log_3 1 \\ x>-1 \end{cases}; \quad \begin{cases} x+1>1 \\ x>-1 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x>0 \\ x>-1 \end{cases}; \quad \underline{x>0} \quad (*)$$

Представим правую часть неравенства как $0 = \log_{\frac{1}{2}} 1$

$$\log_{\frac{1}{2}} \log_3(x+1) \geq \log_{\frac{1}{2}} 1$$

После потенцирования по основанию $\frac{1}{2}$, учитывая, что $0<\frac{1}{2}<1$ и то, что подлогарифмическое выражение должно быть положительным, получим:

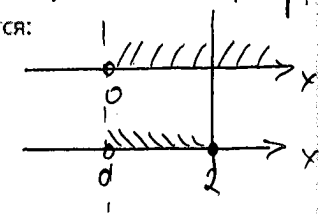
$$0 < \log_3(x+1) \leq 1$$

Заменим в последнем неравенстве $0 = \log_3 1$ и $1 = \log_3 3$,

$$\log_3 1 < \log_3(x+1) \leq \log_3 3 \qquad y = \log_3 x \text{ - возр. ф.}$$

и пропотенцируем его по основанию 3, так $3>1$ знаки неравенств не изменятся:

$$1 < x+1 \leq 3$$



Вычтем из всех частей неравенства 1, получим

$$1-1 < x+1-1 \leq 3-1 \Rightarrow \underline{0 < x \leq 2}$$

Полученный промежуток $(0;2]$ полностью принадлежит ОДЗ, поэтому является решением данного неравенства.

Ответ $x \in (0;2]$

ПРИМЕР 4

Задание Решить неравенство $\lg^2 x - \lg x - 2 \le 0$

Решение $x > 0$ (*)

Это логарифмическое неравенство решается методом замены переменной. Введем замену:

$$\lg x = t$$

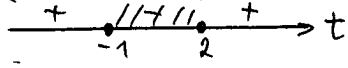
$$t^2 - t - 2 \le 0$$

Для решения этого неравенства, сначала найдем корни уравнения $t^2 - t - 2 = 0$:

$$D = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2); \quad D = 9; \quad \sqrt{D} = 3;$$

$$t_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{2}; \quad t_1 = 2;\ t_2 = -1$$

$(t-2)(t+1) \le 0$

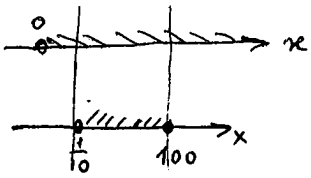


Сделаем обратную замену.

$-1 \le t \le 2$

$-1 \le \lg x \le 2$ ($y = \lg x$ возр.)

$+\frac{1}{10} \le x \le 100$



Ответ $x \in [0,1; 100]$

ПРИМЕР 5

Задание Найти решение неравенства $\log_x(3x-1) > 0$

Решение Данное неравенство содержит переменную и под знаком логарифма и в основании. Представим правую часть неравенства как $0 = \log_x 1$, получим:

$$\log_x(3x-1) > \log_x 1$$

1 $\begin{cases} 0 < x < 1 \\ 3x - 1 < 1 \\ 3x - 1 > 0 \end{cases}$, $\begin{cases} 0 < x < 1 \\ 3x < 2 \\ 3x > 1 \end{cases}$, $\begin{cases} 0 < x < 1 \\ x < \frac{2}{3} \\ x > \frac{1}{3} \end{cases}$, $\frac{1}{3} < x < \frac{2}{3}$,

2 $\begin{cases} x > 1 \\ 3x - 1 > 1 \end{cases}$, $\begin{cases} x > 1 \\ 3x > 2 \end{cases}$, $\begin{cases} x > 1 \\ x > \frac{2}{3} \end{cases}$, $x > \frac{2}{3}$

т.е. $x \in \left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$

Ответ $x \in \left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$