Корень n-ой степени и его свойства

Определение. *Корнем n-ой степени из числа a* называется такое число, *n*-я степень которого равна *a* ($n \in \mathrm{N}$).

Пример. Корень третьей степени из числа 27 равен 3, так как $3^3 = 27$.
Числа 2 и –2 являются корнями шестой степени из числа 64, поскольку $2^6 = 64$ и $(-2)^6 = 64$.

Согласно данному определению корень *n*-ой степени из числа *a* – это решение уравнения $x^n = a$. Число корней этого уравнения зависит от *n* и *a*.

Рассмотрим функцию $f(x) = x^n$. На промежутке $[0;+\infty)$ эта функция при любом *n* возрастает и принимает все значения из промежутка $[0;+\infty)$.

Для любого $a \in [0;+\infty)$ уравнение $x^n = a$ имеет неотрицательный корень и притом только один. Его называют *арифметическим корнем n-й степени из числа a* и обозначают $\sqrt[n]{a}$; число *n* называют *показателем* корня, а само число *a* – *подкоренным выражением*. Знак корня $\sqrt{\ }$ называют также *радикалом*.

Определение. *Арифметическим корнем n-й степени из числа a* называют неотрицательное число, *n*-я степень которого равна *a*.

При чётном *n* существует два корня *n*-й степени из любого положительного числа *a*; корень *n*-й степени из числа 0 равен нулю; корней чётной степени из отрицательных чисел не существует.

При нечётных значениях *n* существует корень *n*-й степени из любого числа *a*, и притом только один.
Для корней нечётной степени справедливо равенство $\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}$.

Замечание 1. Для любого действительного *x*

$$\sqrt[n]{x^n} = \begin{cases} |x|, \text{ если } n \text{ чётно;} \\ x, \text{ если } n \text{ нечётно.} \end{cases}$$

Замечание 2. Удобно считать, что корень первой степени из числа *a* равен *a*.

Основные свойства корней

Для любого натурального n, целого k и любых неотрицательных чисел a и b выполнены равенства:

1. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$.
2. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad (b \neq 0)$.
3. $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a} \quad (k > 0)$.
4. $\sqrt[n]{a} = \sqrt[nk]{a^k} \quad (k > 0)$.
5. $\sqrt[n]{a^k} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^k$ (åñëè $k \leq 0$, òî $a \neq 0$).